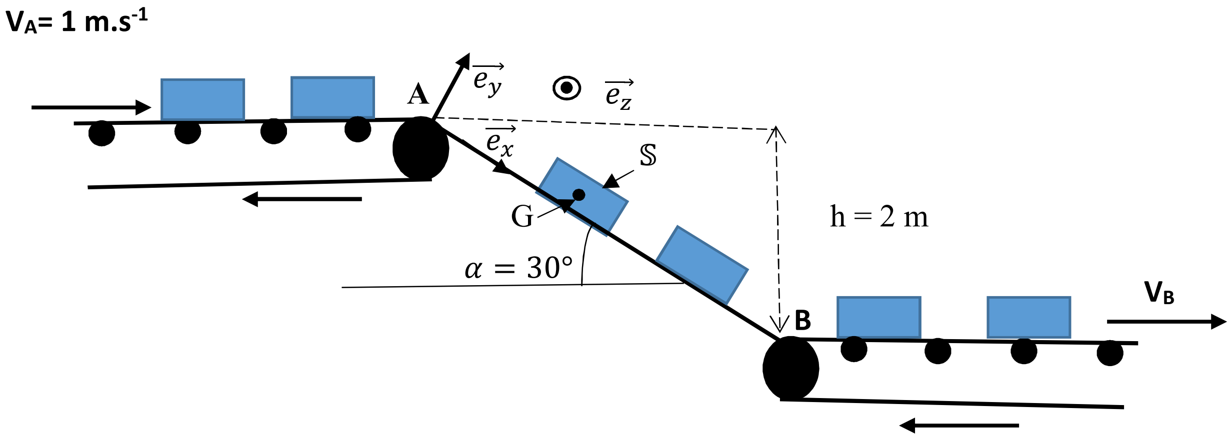
TD 3 : LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE

Exercice 1 : Au tri postal

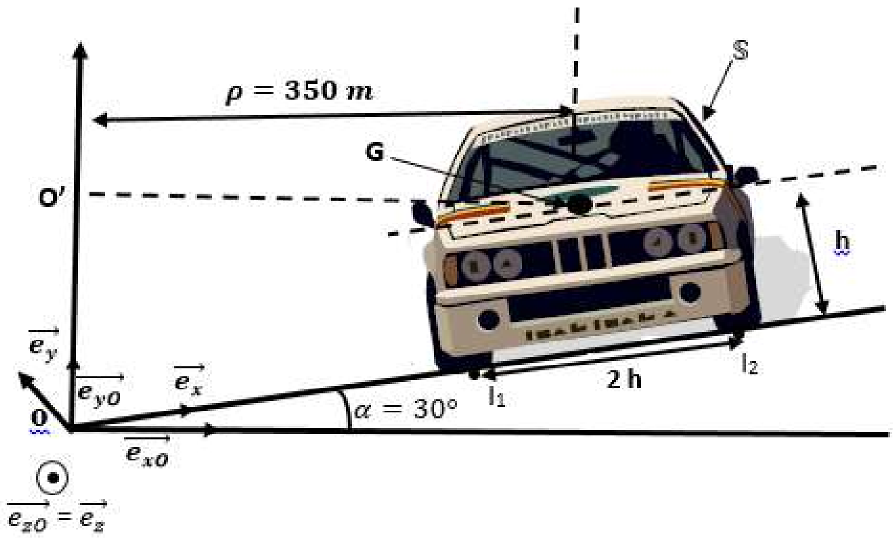
On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés depuis un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $V_A = 1\ m.s^{-1}$. Le colis glisse ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontal ; le coefficient de frottement entre les colis et le plan incliné est f = 0,5. Les colis arrivent en B avec une vitesse V_B qui doit, dans le cas d'un fonctionnement normal, être égale à la vitesse du second tapis roulant. Le référentiel $\mathcal{R}_g\ (A; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen.



Déterminer la vitesse V_B du second tapis roulant assurant le fonctionnement correct de l'ensemble.

Exercice 2 : Voiture de course

Une voiture de course $\mathbb{S}$ de masse M, de centre de masse G prend un virage de rayon constant ρ à une vitesse V constante ; la chaussée est relevée dans le virage (d'un angle α par rapport à l'horizontale) et le coefficient de frottement entre les pneus (en I_1 et I_2) et le sol est f = 0,8.



Le référentiel $\mathcal{R}_O(O;\ \overrightarrow{e_{xO}}; \overrightarrow{e_{yO}}; \overrightarrow{e_{zO}})$ est supposé galiléen. Données ; h = 1 m ; g = 9,81 m.s^{-2} .

1) Déterminer les trois relations qui existent entre les inconnus de liaison au niveau du sol (en I_1 et I_2).

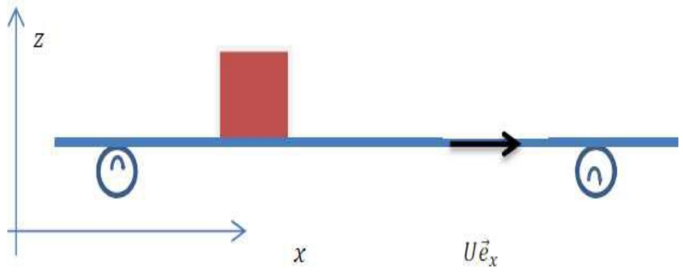
2) Sachant que l'adhérence est mobilisée de la même façon en I_1 et I_2 c'est-à-dire $\dfrac{T_1}{N_1} = \dfrac{T_2}{N_2}$, donner les expression des inconnues de liaison en I_1 et I_2.

3) Déterminer la plage de vitesse qui permet à la voiture de ne pas déraper et de ne pas renverser dans le virage.

<u>Exercice 3 :</u> Cube sur tapis roulant

Un cube de masse m est posé, à t = 0, sans vitesse initiale par rapport au sol sur un tapis roulant, horizontal, qui a un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au sol à la vitesse $\mathbf{U\vec{e}_x}$.

Le coefficient de frottement dynamique de glissement entre le cube et le tapis roulant est noté f.



1. Déterminer la vitesse de glissement du cube par rapport au tapis à l'instant à t = 0.
2. Déterminer la vitesse v(t) du cube dans le référentiel du sol pendant la phase de glissement.
3. Déterminer l'instant t_0 de fin de glissement.
4. Déterminer v(t) pour t.> t_0.
5. Déterminer l'énergie dissipée par frottement dans la phase de glissement.
6. En déduire le travail fourni par le moteur.

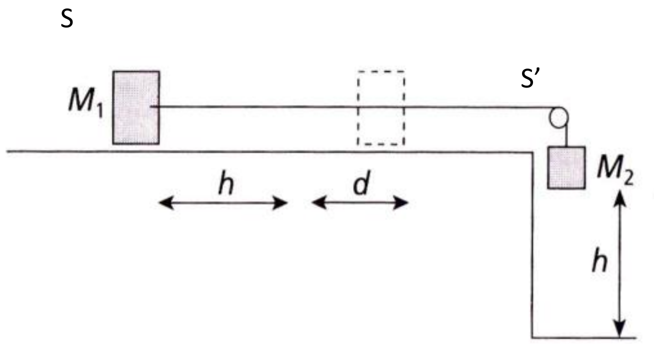
<u>Exercice 4</u> Expérience permettant la mesure d'un coefficient de frottement

Une masse M_1 est mobile sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement f. Elle est reliée, par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse **et** d'une poulie sans frottements et d'inertie négligeable, à une masse M_2 ; cette masse M_2 est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h au-dessus du sol qui limite sa chute ($M_2 > f\,M_1$).

On désigne par **h+d** la distance parcourue par M_1 sur le plan horizontal avant de s'arrêter. Le but de l'exercice est de relier le coefficient de frottement f aux distances h et d facilement mesurables.

1. Analyser qualitativement le mouvement des deux masses. Montrer en particulier qu'il peut se décomposer en deux phases distinctes.

2. Au cours de la première phase, le fil reste tendu et on note F le module de la tension du fil identique en tout point du fil.



2.1. Quelle relation simple existe-t-il entre la vitesse horizontale de la masse M_1 et la vitesse verticale de la masse M_2 ?

2.2. Ecrire le théorème de la quantité de mouvement pour chaque masse. Déterminer l'accélération, la vitesse et l'abscisse x_1 de la masse M_1 en fonction du temps. En déduire la nature du mouvement ?

2.3. Calculer la vitesse v_0 de la masse M_1 lorsque la masse M_2 atteint le sol.

3. Au cours de la seconde phase, seule la masse M_1 est en mouvement. Calculer son accélération linéaire.

4. Déduire une relation entre *f, h, d,* M_1 *et* M_2.

5 On peut également déterminer le coefficient de frottement f en procédant de la façon suivante :

5.1. En calculant l'énergie cinétique acquise par S dans la première phase du mouvement (c'est-à-dire sur le parcours de longueur h).

5.2. En déduire la relation entre h et d.

5.3. Exprimer f en fonction de d, h et du rapport $\frac{\mathbf{M_1}}{\mathbf{M_2}}$.

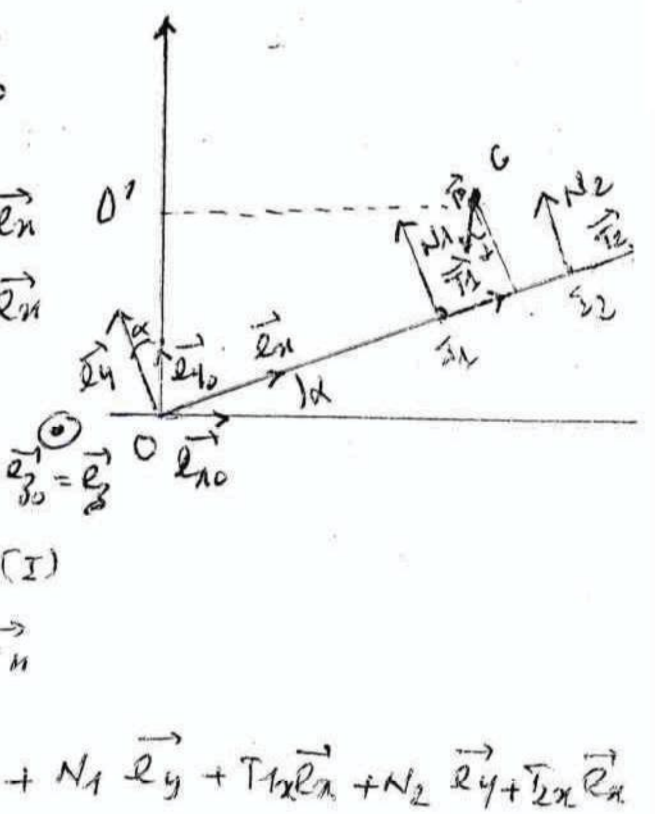
Exercice 2 : Voiture de course

1) On nous demande trois relations qui sont constituées par les trois équations de la dynamique.
Appliquons le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.

* Système étudié : la voiture (S)
* Référentiel galiléen d'étude : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$
* Bilan des forces extérieures

- poids $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\,\vec{e}_{y_0}$
- Réactions du sol
 - en I_1 : $\vec{R}_1 = N_1\,\vec{e}_y + T_{1x}\,\vec{e}_x$
 - en I_2 : $\vec{R}_2 = N_2\,\vec{e}_y + T_{2x}\,\vec{e}_x$

T_x : grandeur algébrique



PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ (I)

$v = \text{cste}$ $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_{x_0} = \vec{a}_n$

(I) $\Rightarrow -M\dfrac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_{x_0} = -Mg\,\vec{e}_{y_0} + N_1\,\vec{e}_y + T_{1x}\vec{e}_x + N_2\,\vec{e}_y + T_{2x}\vec{e}_x$

projection sur $\vec{e}_x$

$$-M\frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_{x_0}\cdot\vec{e}_x = \left(-Mg\,\vec{e}_{y_0} + N_1\vec{e}_y + T_{1x}\,\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y + T_{2x}\,\vec{e}_x\right)\cdot\vec{e}_x$$

$$M\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha =$$

$\vec{e}_{y_0} = \cos\alpha\,\vec{e}_y + \sin\alpha\,\vec{e}_x = \sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y$

$\vec{e}_{x_0} = \cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y$

$$-\frac{Mv^2}{\rho}\left(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y\right) = -Mg\left(\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y\right) + (T_{1x} + T_{2x})\,\vec{e}_x + (N_1 + N_2)\,\vec{e}_y$$

$$\boxed{-M\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha = -Mg\sin\alpha + T_{1x} + T_{2x}}$$ (1) (eq. 1)

$$\boxed{\frac{Mv^2\sin\alpha}{\rho} = -Mg\cos\alpha + N_1 + N_2}$$ (2) (eq. 2)

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_{0'}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{/0'}$$

$$\vec{L}_{0'} = \vec{O'G} \wedge m\vec{V} = m\rho\vec{e}_{x_0} \wedge V\vec{e}_{z_0} = -m\rho V\vec{e}_{y_0}$$

$$\frac{d\vec{L}_{0'}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{\mathcal{M}}_{/0'} = \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_{/0'}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{/0'}(\vec{R}_1) + \mathcal{M}_{/0'}(\vec{R}_2)$$

$$\mathcal{M}_{0'}(\vec{P}) = \vec{O'G} \wedge \vec{P} = \rho\,\vec{e}_{x_0} \wedge Mg(-\vec{e}_{y_0})$$

$$\mathcal{M}_{0'}(\vec{P}) = -Mg\rho\,\vec{e}_{z_0}$$

$$\mathcal{M}_{0'}(\vec{R}_1) = \rho\,\vec{e}_{x_0} \wedge (N_1\vec{e}_y + T_{1x}\vec{e}_x)$$

$$= \rho(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y) \wedge (N_1\vec{e}_y + T_{1x}\vec{e}_x)$$

$$= N_1\rho\cos\alpha\,\vec{e}_{z_0} + \rho T_{1x}\sin\alpha\,e_{z_0}$$

$$= \rho(N_1\cos\alpha + T_{1x}\sin\alpha)\,\vec{e}_{z_0}$$

$$\mathcal{M}_{0'}(\vec{R}_1) = \vec{O'I_1} \wedge \vec{R_1} = (\rho\vec{e}_{x_0} - h\vec{e}_y - h\vec{e}_x) \wedge \vec{R_1}$$

$$= \left[\rho\cos\alpha\,\vec{e}_x - \rho\sin\alpha\,\vec{e}_y - h\vec{e}_y - h\vec{e}_x\right] \wedge \vec{R_1}$$

$$= \left[(\rho\cos\alpha - h)e_x - (\rho\sin\alpha + h)\vec{e}_y\right] \wedge (N_1\vec{e}_y + T_{1x}\vec{e}_x)$$

$$\mathcal{M}_{0'}(\vec{R}_1) = \left[N_1(\rho\cos\alpha - h) + T_{1x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{z_0}$$

$$\mathcal{M}_{O'}(\vec{R}_2) = \overrightarrow{OI_2} \wedge \vec{R}_2 = \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{II_2}\right) \wedge \vec{R}_2$$

$$= \left(\rho \vec{e}_{x_0} - h\vec{e}_y + h\vec{e}_x\right) \wedge \vec{R}_2$$

$$= \left(\rho\cos\alpha\,\vec{e}_x - \rho\sin\alpha\,\vec{e}_y - h\vec{e}_y + h\vec{e}_x\right) \wedge \vec{R}_2$$

$$= \left[(\rho\cos\alpha + h)\vec{e}_x - (\rho\sin\alpha + h)\vec{e}_y\right] \wedge \left(N_2\vec{e}_y + T_{2x}\vec{e}_x\right)$$

$$\mathcal{M}_{O'}(\vec{R}_2) \quad \left[N_2(\rho\cos\alpha + h) + T_{2x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{3_0}$$

D'où on a :

$$-Mg\rho\,\vec{e}_{3_0} + \left[N_1(\rho\cos\alpha - h) + T_{1x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{3_0}$$
$$+ \left[N_2(\rho\cos\alpha + h) + T_{2x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{3_0} = \vec{0}$$

$$-Mg\rho + (\rho\cos\alpha - h)N_1 + T_{1x}(\rho\sin\alpha + h$$
$$+ (\rho\cos\alpha + h)N_2 + T_{2x}(\rho\sin\alpha + h) = 0 \quad (\text{II})$$

Si on écrit (eq 1) × $\sin\alpha$ + (équ 2) × $\cos\alpha$, on obtient

$$\begin{cases} -\dfrac{Mv^2}{\rho}\sin\alpha\cos\alpha = -Mg\sin^2\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha \quad (2) \\ \dfrac{Mv^2\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} = -Mg\cos^2\alpha + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha \end{cases}$$

$$0 = -Mg(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha =$$

$$-Mg + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha = 0$$

En multipliant par ρ on a :

$$-Mg\rho + N_1\rho\cos\alpha + N_2\rho\cos\alpha + T_{1x}\rho\sin\alpha + T_{2x}\rho\sin\alpha = 0$$

$$\mathcal{M}_{O'}(\vec{R}_2) = \vec{OI_2} \wedge \vec{R}_2 = \left(\vec{OG} + \vec{GI} + \vec{II_2}\right) \wedge \vec{R}_2$$

$$= \left(\rho \vec{e}_{x_0} - h\vec{e_y} + h\vec{e_x}\right) \wedge \vec{R_2}$$

$$= \left(\rho\cos\alpha\, \vec{e_x} - \rho\sin\alpha\, \vec{e_y} - h\vec{e_y} + h\vec{e_x}\right) \wedge \vec{R_2}$$

$$= \left[(\rho\cos\alpha + h)\vec{e_x} - (\rho\sin\alpha + h)\vec{e_y}\right] \wedge \left(N_2\vec{e_y} + T_{2x}\vec{e_x}\right)$$

$$\mathcal{M}_{O'}(\vec{R_2}) \;\; \left[N\;(\rho\cos\alpha + h) + T_{2x}(\rho\sin\;\;+h)\right]\vec{e}_{3_0}$$

D'où on a:

$$-Mg\rho\vec{e}_{3_0} + \left[N_1(\rho\cos\alpha - h) + T_{1x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{3_0}$$
$$+ \left[N_2(\rho\cos\alpha + h) + T_{2x}(\rho\sin\alpha + h)\right]\vec{e}_{3_0} = \vec{0}$$

$$-Mg\rho + (\rho\cos\alpha - h)N_1 + T_{1x}(\rho\sin\alpha + h$$
$$+ (\rho\cos\alpha + h)N_2 + T_{2x}(\rho\sin\alpha + h) = 0 \quad (II)$$

Si on écrit (eq 1) × $\sin\alpha$ + (équ 2) × $\cos\alpha$, on obtient

$$\begin{cases} -\dfrac{Mv^2}{\rho}\sin\alpha\cos\alpha = -Mg\sin^2\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha \quad (2') \\ \dfrac{Mv^2\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} = -Mg\cos^2\alpha + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha \end{cases}$$

$$0 = -Mg(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha = 0$$

$$-Mg + N_1\cos\alpha + N_2\cos\alpha + T_{1x}\sin\alpha + T_{2x}\sin\alpha = 0$$

En multipliant par ρ on a:

$$-Mg\rho + N_1\rho\cos\alpha + N_2\rho\cos\alpha + T_{1x}\rho\sin\alpha + T_{2x}\rho\sin\alpha = 0$$

le développement de (II) donne

$$\underbrace{-Mg\rho + \rho N_1 \cos\alpha + \rho T_{1x}\sin\alpha + \rho N_2\cos\alpha + T_{2x}\rho\sin\alpha}_{0}$$
$$+ hN_2 - hN_1 + T_{1x}h + T_{2x}h = 0$$

Donc on a : $-hN_1 + T_{1x}h + hN_2 + T_{2x}h = 0$

$$\Rightarrow \boxed{-N_1 + T_{1x} + N_2 + T_{2x} = 0} \quad (\text{équ. } 3)$$

2°) L'adhérence est mobilisée de la même façon en I_1 et I_2 donc : $\dfrac{T_{1x}}{N_1} = \dfrac{T_{2x}}{N_2}$

on a donc quatre équations à quatre inconnues $(N_1, N_2, T_{1x}, T_{2x})$

(eq. 1) $$-\frac{MV^2}{\rho}\cos\alpha = -Mg\sin\alpha + T_{1x} + T_{2x}$$

(eq. 2) $$\frac{MV^2}{\rho}\sin\alpha = -Mg\cos\alpha + N_1 + N_2$$

(eq 3) $$0 = -N_1 + T_{1x} + N_2 + T_{2x}$$

(eq. 4) $$\frac{T_{1x}}{N_1} = \frac{T_{2x}}{N_2} \quad \text{ou} \quad \frac{T_1}{N_1} = \frac{T_2}{N_2}$$

car T_{1x} et T_{2x} ont le même signe et $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$, $T_1 = |T_{1x}|$, $T_2 = |T_{2x}|$

(eq.3) $\Rightarrow$ $T_{1x} + T_{2x} = N_1 - N_2$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} -m\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha = -mg\sin\alpha + N_1 - N_2 \quad (5) \\ \frac{mv^2}{\rho}\sin\alpha = -mg\cos\alpha + N_1 + N_2 \quad (6) \end{cases} \Leftarrow (2)$$

$(5)+(6) \Rightarrow$ $\frac{Mv^2}{\rho}(\sin\alpha - \cos\alpha) = -mg(\sin\alpha + \cos\alpha) + 2N_1$

$$\boxed{N_1 = \frac{mg}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{Mv^2}{2\rho}(\sin\alpha - \cos\alpha)}$$

et $(6)-(5) \Rightarrow$

$$\frac{mv^2}{\rho}(\sin\alpha + \cos\alpha) = mg(\sin\alpha - \cos\alpha) + 2N_2$$

$$\boxed{N_2 = \frac{mv^2}{2\rho}(\sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{mg}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

(eq 4) s'écrit aussi $\frac{T_{1x}}{N_1} = \frac{T_{2x}}{N_2} = \frac{T_{1x} + T_{2x}}{N_1 + N_2}$

(eq 1) $\Rightarrow$ $T_{1x} + T_{2x} = mg\sin\alpha - \frac{mv^2}{\rho}\cos\alpha$

(eq 2) $\Rightarrow$ $N_1 + N_2 = Mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}\sin\alpha$

$$\frac{T_{1x}}{N_1} = \frac{T_{2x}}{N_2} = \frac{T_{1x} + T_{2x}}{N_1 + N_2} = \frac{mg\sin\alpha - \frac{Mv^2}{\rho}\cos\alpha}{mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}\sin\alpha}$$

$$= \frac{g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha}$$

$$T_{1x} = \frac{g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha} \times \left[\frac{Mg}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) \right.$$

$$T_{1x} = \frac{g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha}\left[\frac{Mg}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) - \frac{Mv^2}{2\rho}(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$$

$$T_{2x} = \frac{g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha} \times \left[\frac{Mg}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) + \frac{Mv^2}{2\rho}(\cos\alpha + \sin\alpha)\right]$$

3) Pour que la voiture ne dérape pas, il faut que

$$\frac{\|\vec{T_1}\|}{\|\vec{N_1}\|} = \frac{\|\vec{T_2}\|}{\|\vec{N_2}\|} < f \quad \text{soit dans notre cas}$$

$$\frac{|T_{1x}|}{N_1} = \frac{|T_{2x}|}{N_2} < f$$

$$\Rightarrow \frac{\left| g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha \right|}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha} < f.$$

$$\Rightarrow \boxed{-f < \frac{g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\sin\alpha} < f.}$$

Il y a deux condition (double inégalité) car la voiture pourrait glisser

- vers la droite dans le cas d'une vitesse excessive

($T_{1x} < 0$ et $T_{2x} < 0$)

Vers la gauche dans le cas d'une vitesse trop faible

$(T_{1x} > 0$ et $T_{2x} > 0)$

calcul

* Déterminons la plage de vitesse qui permet à la voiture de ne pas déraper.

$$* \quad -f < \frac{g\sin\alpha - \frac{V^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{V^2}{\rho}\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad -fg\cos\alpha - \frac{fV^2}{\rho}\sin\alpha < g\sin\alpha - \frac{V^2}{\rho}\cos\alpha$$

$$\frac{V^2}{\rho}\left(\cos\alpha - f\sin\alpha\right) < g\sin\alpha + fg\cos\alpha$$

$$V^2 < \frac{\rho g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

$$V < \sqrt{\frac{\rho g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}}$$

$$V < \sqrt{\frac{350 \times 9{,}81(\sin 30° + 0{,}8\cos 30°)}{\cos 30° - 0{,}8\sin 30°}}$$

$$V < 93{,}75 \text{ m/s} = 337{,}48 \text{ km/h}$$

$$* \quad \frac{g\sin\alpha - \frac{V^2}{\rho}\cos\alpha}{g\cos\alpha + \frac{V^2}{\rho}\sin\alpha} < f$$

$$g\sin\alpha - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha < f g\cos\alpha + f\frac{v^2}{\rho}\sin\alpha$$

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) < \frac{v^2}{\rho}(f\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$v^2 > \frac{\rho g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\cos\alpha + f\sin\alpha} < 0$$

$\Rightarrow v > 0$

La ~~condition pour~~ plage de vitesse pour que la voiture ne derape pas est $0 < v < 337,48$ km/h

Pour que la voiture ne se renverse pas, il ne faut pas qu'il y soulèvement des deux roues, soit

- $N_1 \geq 0$ (renversement vers la droite);
- $N_2 \geq 0$ (toujours verifiée si $0 \leq \alpha \leq 90°$)

$N_1 \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{Mg}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) + \frac{Mv^2}{2\rho}(\sin\alpha - \cos\alpha) \geq 0$$

$$\frac{Mg}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) \geq \frac{Mv^2}{2\rho}(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$v^2 \leq \rho g\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$v \leq \sqrt{\rho g\frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}}$$

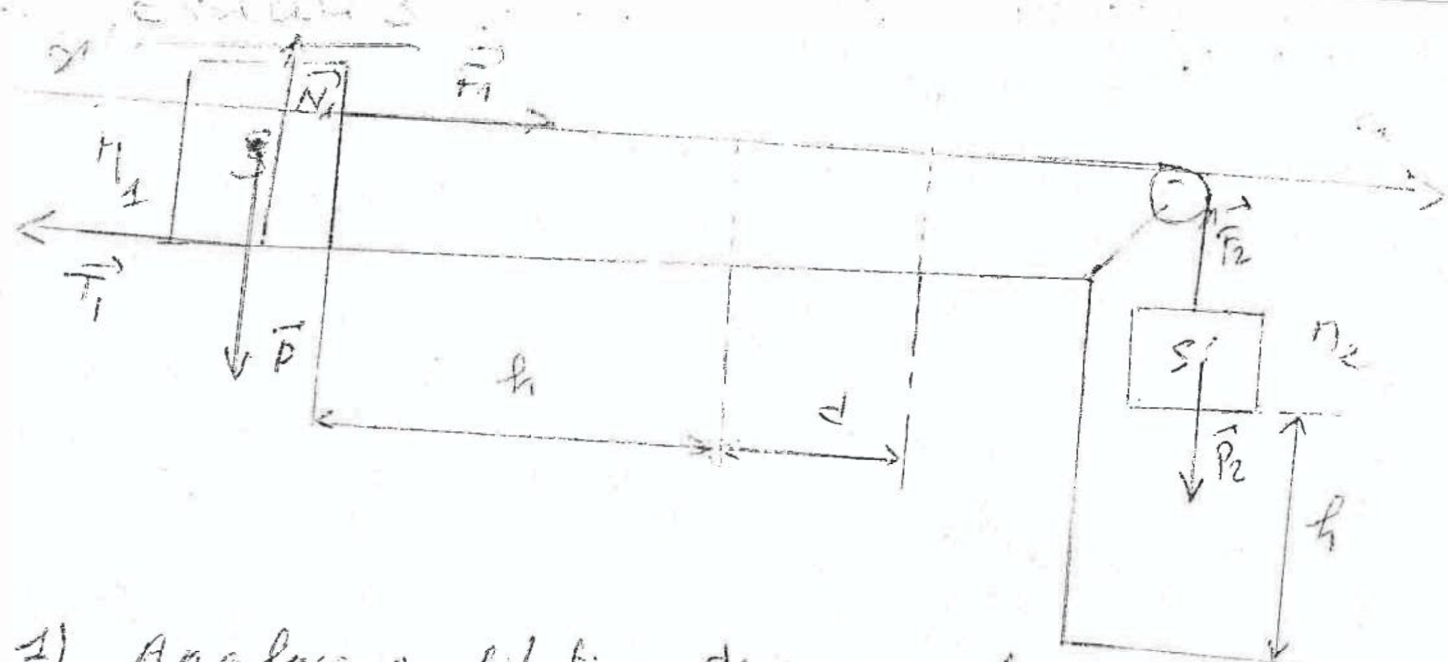
AN $v \leq \sqrt{350 \times 9{,}8 (\cos 30 ...}$

$$v \leq \sqrt{\frac{350 \times 9{,}8\,(\cos 30° + \sin 30°)}{\cos 30° - \sin 30°}} = 113{,}2 \text{ m/s} \approx$$

$v \leq 407{,}52$ km/h

Il y aura donc toujours glissement avant renversement donc la plage de vitesse qui permet à la voiture de ne pas déraper et de ne pas se renverser dans le virage reste

$0 \leq v \leq 337,48 \text{ km/h}$.



1) Analyse qualitative de mouvement des deux masses :

- lorsqu'on lâche M_2, elle entraine la masse M_1 d'un mouvement rectiligne uniformement accéléré.
- Lorsque la masse M_2 touche le sol, le solide M_1 est animé d'un mouvement ~~reto~~ rectiligne uniformement décéléré jusqu'à l'arret.

phase I : mouvement accéléré

phase II : mouvement décéléré

2- première phase : phase d'accélération

2-1. Fil inextensible et sans masse $V_1^{(M_1)} = V_2(M_2)$

2-2 Théorème de la quantité de mouvement aux masses M_1 et M_2 :

- système {solide S}
- bilan des forces : $\vec{P_1}$ (poids), reaction $\vec{R_1} = \vec{T_1} + \vec{N_1}$

la tension du fil $\vec{F_1}$

- Ref. terrestre supposé galiléen

TFD : $m\vec{a}_1 = \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{N_1} + \vec{F_1}$

projection sur (x'x) :

$m_1 a_1 = -T_1 + F_1$ (1)

sur (y'y) :

$0 = N_1 - P \Rightarrow N_1 = m_1 g$ (2)

système : { solide S' }

- bilan des forces : le poids $\vec{P_2}$

TFD.

$m\vec{a_2} = \vec{P_2} + \vec{F_2}$

projection sur (z'z)

$m_2 a_2 = m_2 g - F_2$ (3)

fil inextensible et poulie sans masse

$F_1 = F_2 = F$ et $a_1 = a_2 = a$

$m_1 a + m_2 a = -T_1 + m_2 g$ ((1) + (3))

$T_1 = f m_1 g$ (glissement de m_1 sur le sol)

$(m_1 + m_2) a = g(m_2 - f m_1)$ $a \neq 0$ si $m_2 > f m_1$

$$\boxed{a = g \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2}}$$

* vitesse : $V_1(t) = g t \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2}$

* abscisse de S : $x_1 = \frac{1}{2} g t^2 \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2}$

Nature du mouvement : mouvement rectiligne uniformément accéléré pendant la première phase

2-3 La vitesse V_0 de m_1 lorsque m_2 touche le sol ($x_1 = h$)

$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \frac{m_2 - m_1 f}{}$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h\,(m_1+m_2)}{g(m_2 - m_1 f)}}$$

$$V_0 = a t_1 = g\,\frac{m_2 - m_1 f}{m_1+m_2} \times \sqrt{\frac{2h(m_1+m_2)}{g(m_2-m_1 f)}}$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - m_1 f)}{m_1+m_2}}}$$

3.- Calcul de l'accélération de la masse M_1 au cours de la seconde phase

$M_1\vec{a_1} = \vec{P_1} + \vec{N_1} + \vec{T_1}$ ($F_1 = 0$ fil non tendu)

projection sur $(x'x)$ (sur $z'z$) $0 = N_1 - P_1$

$M_1 a_1 = -T_1$ $\qquad N_1 = m_1 g$

$T = f m_1 g \Rightarrow a = -\dfrac{f m_1 g}{m_1}$

$$\boxed{a_1 = -fg}$$

$V_1 = -fgt + V_0$

$x_1 = -\frac{1}{2}fgt^2 + V_0 t + h.$

4- Relation entre f, h, d, m_1 et m_2

Arrêt, $x_1 = h+d$ et $V_1 = 0$ $\quad t' = \dfrac{V_0}{fg}$

$$h+d = -\frac{1}{2}fgt'^2 + V_0 t' + h$$

$$d = -\frac{1}{2}gf \times \frac{V_0^2}{f^2g^2} + V_0\frac{V_0}{fg}$$

$$d = -\frac{V_0^2}{2(fg)} + \frac{V_0^2}{fg} = \frac{V_0^2}{2(fg)}$$

$$d = \frac{1}{2fg} \times \frac{2gh(m_2 - m_1 f)}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{h(m_2 - m_1 f)}{f(m_1 + m_2)}$$ (diviser numérateur et dénominateur par f.

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{m_2}{f} - m_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{m_2}{f} - m_1 = (m_1 + m_2)\frac{d}{h}$$

$$\frac{m_2}{f} = m_1 + (m_1 + m_2)\frac{d}{h}$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{m_1}{m_2} + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{d}{h}}$$

5-

5-1 Energie cinétique acquise par S dans la première phase

$E_{c_1} = \frac{1}{2} M_1 V_S^2$, V_S : vitesse de m_1 lorsque $x = h$.

théorème de l'EC à l'ensemble {S + S')

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_S^2 = -T_1 h + m_2 g h$$
$$= (-f m_1 + m_2) g h$$

$$V_S^2 = \frac{2gh(-f_1 m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$E_{c_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(-f m_1 + m_2) g h$$

~~Théorème~~

5-2 relation entre h et d

Théorème de l'Ec entre les positions ($x = h$) et ($x = h + d$)

$$\Delta E_c = 0 - E_{c1} = -f m_1 g d$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(-f m_1 + m_2) g h = f m_1 g d$$

$$\frac{-f m_1 + m_2}{m_1 + m_2} h = f d$$

5-3 Expression de f en fonction de d, h et $\frac{m_1}{m_2}$

$$-f m_1 + m_2 = f (m_1 + m_2) \frac{d}{h}$$ division par f.

$$-m_1 + \frac{m_2}{f} = (m_1 + m_2) \frac{d}{h}$$

$$\frac{m_2}{f} = m_1 + (m_1 + m_2) \frac{d}{h}$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{m_1}{m_2} + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{d}{h}}$$

La donnée de m_1, m_2, h et d permet donc de déterminer le coefficient de frottement f.